

# Modelo numérico de esparcimiento de luz láser en superficies metálicas usando el método de Monte Carlo

Víctor Martínez Fuentes, Iván Domínguez López, Adrián Luis García García\*  
 Laboratorio de Tribología. CICATA-IPN. Unidad Querétaro  
 Cerro Blanco 141. Colinas del Cimatario. Querétaro, México. 76090  
 (Recibido: 19 de febrero de 2009; Aceptado: 2 de junio de 2009)

Se aplica el método de Monte Carlo para simular el fenómeno de esparcimiento de luz láser (LLS) por una superficie maquinada mediante un proceso de torneado. El modelo se basa en la óptica geométrica e incorpora las características de rugosidad y propiedades ópticas de la superficie, así como la disposición de los elementos ópticos de la técnica LLS, como parámetros de entrada. La validación del modelo numérico se efectuó experimentalmente usando un patrón de rugosidad acanalado, de perfil periódico. La distribución de intensidad de luz registrada experimentalmente corresponde cualitativamente con el modelo propuesto. Se observa una correlación entre los radios de curvatura del patrón de esparcimiento del experimento y el modelo numérico. El modelo validado se aplicó a superficies cuya textura se modificó usando un aparato de perno en disco, con el que se provocó una huella de desgaste de rugosidad unidireccional, acanalada. Los resultados numéricos concuerdan de manera cualitativa con los experimentales.

**Palabras Clave:** LLS; Método Monte Carlo; Torneado; Superficie maquinada; Óptica geométrica; Desgaste; Simulación numérica

A Monte Carlo simulation was implemented to emulate the phenomenon of laser light scattering (LLS) by a turned surface. The model is based on geometrical optics and uses surface roughness, surface optical properties and space arrangement of the optical elements of the LLS technique, as input parameters. Validation of the model was performed experimentally using a periodical grooved-profile roughness standard. The distribution of scattered laser light registered experimentally corresponds qualitatively with the model here in. A correlation was established between the curvature radius obtained experimentally, and those obtained numerically. The validated model was applied to surfaces whose texture was modified using a pin-on-disk apparatus, causing a unidirectional grooved wear scar. Numerical results agree quite satisfactorily with the experiment.

**Keywords:** LLS; Monte Carlo Method; Turning; Machined surface; Geometric optics; Wear; Numerical simulation

## 1. Introducción

El desgaste se define como el daño causado en las superficies de un par tribológico debido al contacto mecánico o los efectos de la fricción, y está relacionado con el cambio de las características de topografía y textura de las superficies en contacto. El desgaste se caracteriza a través del volumen de material removido y el cambio en la distribución de picos de rugosidad en la superficie.

En el inicio de un ensayo de desgaste puede ocurrir un periodo de desgaste inicial (conocido como *running-in* ó *wear-in*), en donde se eliminan los picos más altos de las asperezas por el contacto entre los dos materiales. En este periodo de desgaste, los cambios de textura son del mismo orden de magnitud de la rugosidad inicial. Estos se determinan con palpadores mecánicos que requieren que la muestra permanezca estática [1].

Por otra parte, para detectar el cambio de textura en la superficie, ocasionado por el contacto mecánico, se puede hacer uso de la técnica conocida como Esparcimiento de Luz Láser o LLS, por sus siglas en inglés: Laser Light Scattering.

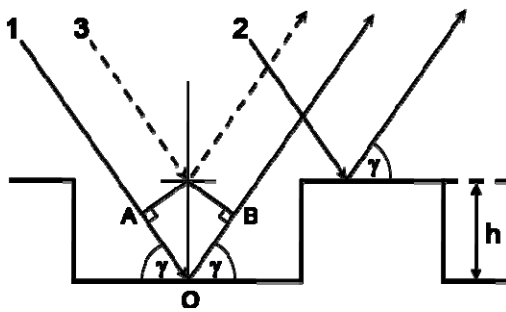
Para caracterizar la textura de superficies se han utilizado técnicas ópticas que han probado su versatilidad y rapidez comparadas con los métodos tradicionales de palpador mecánico [2-4]. En particular, la técnica LLS tiene la ventaja de que permite realizar correlaciones en tiempo real de los cambios relativos en señal de intensidad de la luz láser esparcida, versus los cambios en la textura de la superficie, de forma dinámica [5-8].

La mayoría de las aplicaciones de la luz láser esparcida están enfocadas principalmente a la correlación que se obtiene entre la intensidad de la LLS con la micro-textura de la superficie (rugosidad rms  $R_q$  menor a 1  $\mu\text{m}$ ), pero no para mayores modificaciones en la macro-textura (topografía) de la superficie como las obtenidas en un ensayo de desgaste que llegan a formar un surco o huella de décimas de milímetro de profundidad.

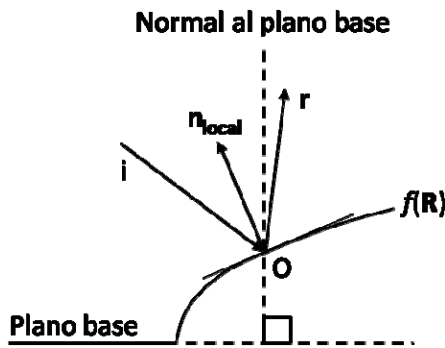
Domínguez et al, demostraron experimentalmente la factibilidad del uso de la técnica LLS al estudio del desgaste en tiempo real en un tribómetro de perno en disco,

**Tabla 1.** Parámetros del diseño experimental.

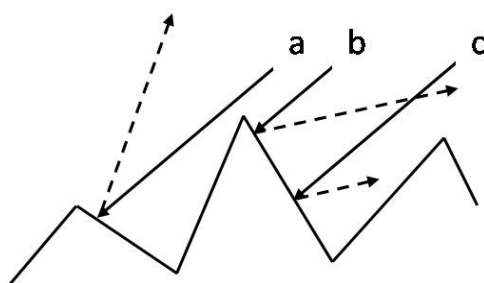
$\theta$ (°)	OL (mm)	OP (mm)
30	215	140
45	270	150
60	300	180
75	370	70



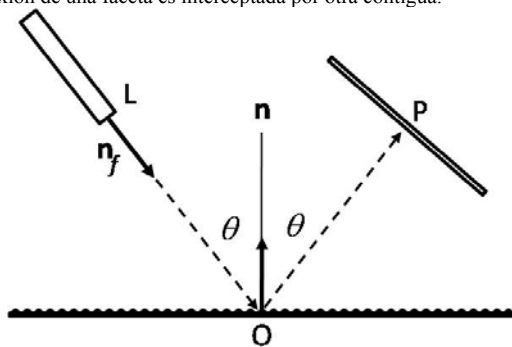
**Figura 1.** Criterio de interferencia de Rayleigh para un haz de longitud de onda  $\lambda$ . La diferencia de trayectorias  $\Delta r$  entre los rayos 1 y 2, es la distancia adicional AOB que recorre el rayo 1 con respecto al rayo virtual 3;  $\gamma$  es el ángulo de elevación del haz incidente.



**Figura 2.** Definición de la normal local sobre la superficie  $f(R)$  en el punto de incidencia O. La dirección de  $n_{local}$  es bisectriz del ángulo entre el rayo incidente (i) y el reflejado (r).



**Figura 3.** Efectos de esparcimiento de un haz de luz. Rayo a: reflexión simple; rayo b: ensombrecimiento, un pico de rugosidad impide al rayo de luz incidir sobre una faceta contigua; rayo c: enmascaramiento, la reflexión de una faceta es interceptada por otra contigua.



**Figura 4.** Parámetros experimentales del arreglo óptico. OL y OP son las distancias del punto de incidencia O al láser (L) y a la pantalla (P), respectivamente;  $\theta$  es el ángulo de incidencia con respecto a la normal  $n$ ;  $n_f$  es el vector unitario normal al plano de salida del haz láser.

haciendo incidir un haz de luz láser sobre la huella de desgaste en el disco y un detector óptico para registrar los cambios de intensidad LLS ocasionados por los cambios en topografía superficial producidos. Los resultados obtenidos muestran que el sistema óptico de detección de LLS es sensible a los cambios en la topografía de la superficie del disco, provocados por el desgaste [9]. Estas observaciones sugieren aplicaciones de interés para el estudio de desgaste en superficies de ingeniería, las cuales se forman a través de procesos de manufactura como: torneado, fresado, barrenado, entre otros [12].

En este trabajo se desarrolla un modelo matemático basado en la óptica geométrica y el método de Monte Carlo para entender los patrones de esparcimiento de la luz láser observados experimentalmente en superficies de ingeniería maquinadas en el torno; en este caso, el acabado de la superficie es acanalado unidireccional, concéntrico.

## 2. Modelos de reflexión de luz en superficies rugosas

De acuerdo con la ley de Snell, el ángulo de reflexión de un haz de luz que incide sobre una superficie plana es igual al ángulo de incidencia, con respecto a la normal a la superficie. Sin embargo, una superficie real presenta imperfecciones en su textura que originan patrones de esparcimiento del haz incidente.

Rayleigh sugirió una forma de relacionar la rugosidad de la superficie con la longitud de onda y el ángulo de incidencia, considerando la altura  $h$  del pico de rugosidad, el ángulo  $\gamma$  de elevación del rayo incidente y la longitud de onda  $\lambda$  de la luz incidente, de tal manera que la diferencia de trayectoria entre dos rayos es:

$$\Delta r = 2h \text{sen } \gamma \tag{1}$$

y por lo tanto la diferencia de fase está dada por:

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = \frac{4\pi h}{\lambda} \text{sen } \gamma \tag{2}$$

como se muestra en la figura 1.

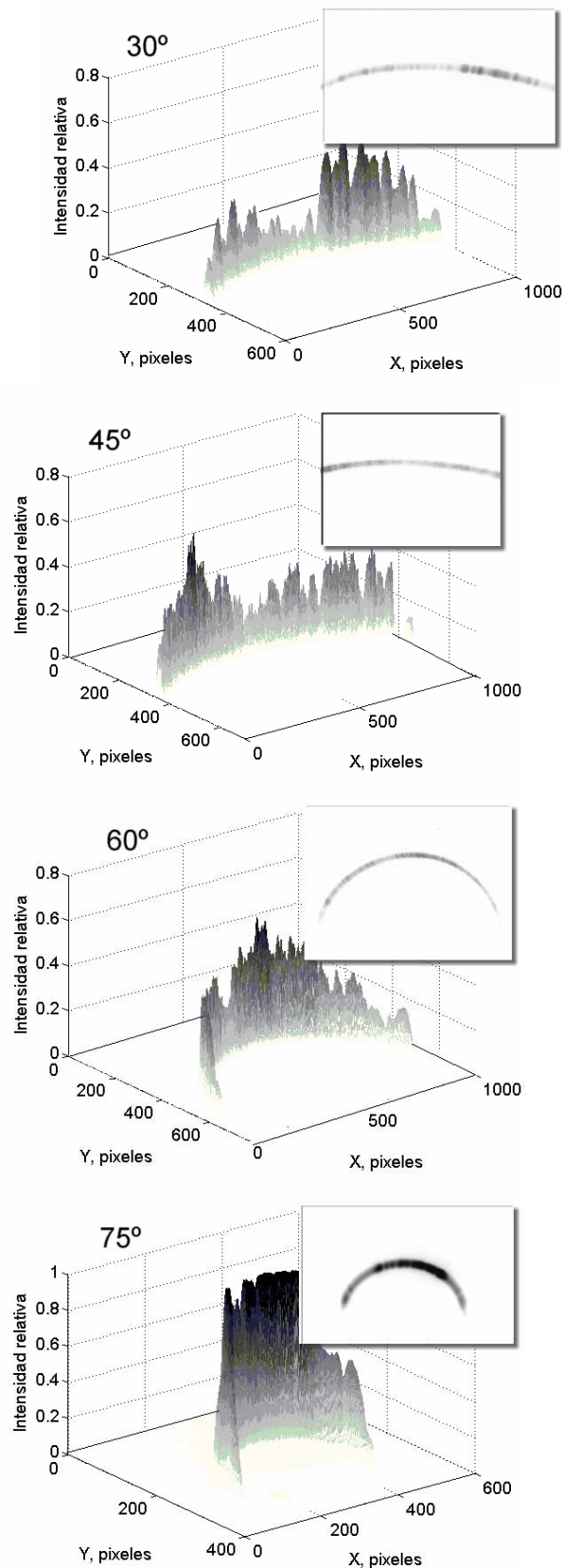
A partir de las ecuaciones (1) y (2), se establece que una superficie se comportará ópticamente lisa bajo cualquiera de las siguientes dos condiciones:

$$\frac{h}{\lambda} \rightarrow 0 \text{ ó } \gamma \rightarrow 0 \tag{3}$$

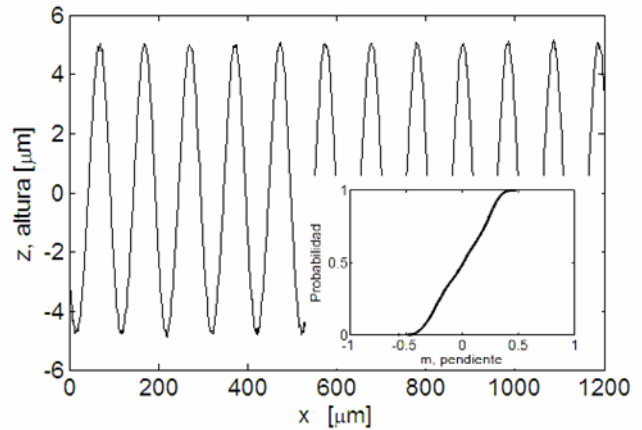
Si  $h \ll \lambda$ , la diferencia de fase  $\Delta \phi$  es pequeña y el tratamiento permite utilizar la teoría electromagnética [10]. Cuando  $h \sim \lambda$  o  $h \gg \lambda$ , el modelo que mejor se ajusta para describir el fenómeno es el de la óptica geométrica [11].

### 2.1 Óptica geométrica

En el presente trabajo, la rugosidad  $R_q$  de las superficies sometidas a desgaste varía de 0.1 a 1  $\mu\text{m}$ , del mismo orden



**Figura 5.** Gráficas de intensidad del patrón de esparcimiento de luz registrado en una pantalla plana (recuadro), utilizando el arreglo experimental de la figura 4. Se indica el ángulo  $\theta$ .



**Figura 6.** Perfil de textura de la superficie del patrón de rugosidad; en el recuadro se muestra su correspondiente FDA de las pendientes.

de magnitud de la longitud de onda del láser utilizado ( $\lambda = 630 \text{ nm}$ ). Adicionalmente, la distribución aleatoria en el tamaño de los picos y valles evita que se manifieste algún fenómeno de interferencia de la luz, al interactuar con la superficie.

El ángulo de reflexión real del rayo de luz láser esparcido está determinado por la normal local de la rugosidad, no por la normal de la superficie [3, 4, 13,14], como se muestra en la figura 2. Por otra parte, la rugosidad da origen a efectos conocidos como ensombrecimiento y enmascaramiento. El ensombrecimiento ocurre cuando un pico de rugosidad impide al rayo de luz láser alcanzar una faceta contigua, y el enmascaramiento, cuando la faceta intercepta la reflexión del rayo, como se muestra en la figura 3.

### 2.2 Modelación del esparcimiento de un haz láser reflejado usando óptica geométrica y el método de Monte Carlo

La modelación matemática de la reflexión de la luz láser usando el Método Monte Carlo (MMC) se basa en el tratamiento estocástico de la interacción de la luz láser con la materia. Cada paso en el proceso involucra la trayectoria de un solo rayo de luz desde la fuente láser hasta el detector o pantalla, construyendo así una cadena de Markov. Debido a que los resultados obtenidos por el MMC son promedios de muestras individuales, la media se puede calcular con mayor exactitud incrementando el número de procesos estocásticos [15]. El MMC aplicado a la interacción de la radiación electromagnética con la materia tiene aplicación en la determinación de emisividad en cavidades de cuerpo negro, en donde la reflexión de la radiación infrarroja tiene componentes especulares y difusos [16-18].

Los parámetros de entrada de la modelación de la luz láser esparcida por una huella de desgaste tienen que ver con: la disposición geométrica del láser con respecto a la superficie metálica sobre la que incide; las propiedades de reflexión de la superficie; el perfil de rugosidad de la superficie; el enfoque del láser; las áreas relativas de la

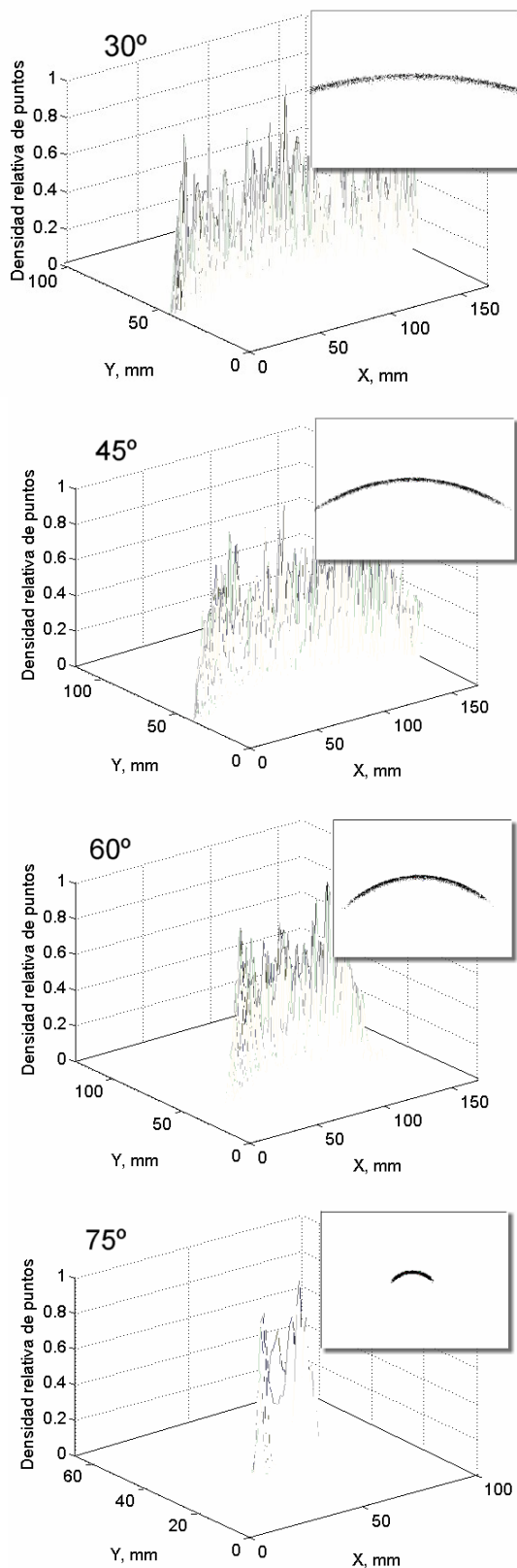


Figura 7. Resultados del modelo numérico de esparcimiento de luz láser sobre el patrón de rugosidad correspondientes a las condiciones experimentales de la figura 5.

huella de desgaste y el blanco (spot) del láser sobre la huella.

El algoritmo de modelación es el siguiente:

1. La superficie experimental se define por medio de una función analítica  $f(\mathbf{R}) = 0$ . El comportamiento de ésta para reflejar la luz del haz láser se obtiene a partir de la *función de distribución acumulada* (FDA) de las pendientes de los picos de rugosidad. Esta FDA de las pendientes se obtiene a partir de una medición del perfil de rugosidad de la superficie experimental, realizada a lo largo de una línea, en la dirección perpendicular a la de las marcas del maquinado o sesgo. Al área iluminada por el haz láser se le asigna una rugosidad con la FDA de pendientes determinada a partir del perfil, como requiere el MMC para este tipo de aplicaciones [15,17], siendo esta una de las suposiciones más fuertes del modelo.

2. El haz láser con un perfil gaussiano de intensidad, se define generando números pseudoaleatorios que representan las coordenadas (x,y) del plano de los cuales parten los rayos, uno a la vez, utilizando los algoritmos de Marsenne Twister y Ziggurat de Marsaglia [19].

3. El punto de intersección de cada rayo del haz con la superficie se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{n}_f t \\ f(\mathbf{R}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{R}_0$  es el vector de posición del punto de inicio del rayo,  $\mathbf{n}_f$  el vector unitario en la dirección del rayo,  $f(\mathbf{R}) = 0$  la ecuación de la superficie y  $t$  es la distancia del punto de salida del haz en el láser, al punto de intersección con la superficie del disco.

4. La condición de reflexión o absorción de cada rayo por el material se determina definiendo el parámetro estocástico  $\eta_\alpha$  con una distribución uniforme en el intervalo [0,1] y la reflectividad  $\rho$  del material. Si  $\eta_\alpha < \rho$ , entonces se registra una reflexión del rayo. En caso contrario se registra una absorción y la trayectoria finaliza en este paso y regresa al paso 2 por un nuevo rayo.

5. Tal como se muestra en la figura 2, la normal local  $\mathbf{n}_{local}$  se define en el punto de intersección del rayo con la superficie  $f(\mathbf{R})$  a través de la función gradiente:

$$\mathbf{n}_{local} = \nabla f \quad (5)$$

7. La pendiente de la faceta sobre la que incide uno de los rayos se determina a través de un número aleatorio  $\eta_m$  con distribución uniforme en el intervalo (0,1) que sirve como dato de entrada en la función inversa de la FDA de pendientes. Esta función inversa se determina por medio de un interpolador cúbico.

8. Los efectos de enmascaramiento y ensombrecimiento debidos a la rugosidad en ángulos de incidencia rasantes,  $\theta$  cercanos a  $90^\circ$ , se consideran por

medio de un factor de atenuación, según el modelo de Torrance y Sparrow [20], que se obtiene suponiendo que la 9. Finalmente, el patrón de esparcimiento se forma por la intersección de todos los rayos del haz láser con una pantalla definida por un plano  $g(\mathbf{R}) = 0$ .

10. superficie está formada por cavidades en forma de surcos en V cuyos efectos caen dentro de estas cavidades. Al comparar el factor de atenuación con un número aleatorio  $\eta_a$ , de distribución uniforme en el intervalo (0,1), se decide si un rayo se atenúa o sigue su trayectoria de reflexión.

### 3. Validación del modelo numérico

#### 3.1 Resultados experimentales

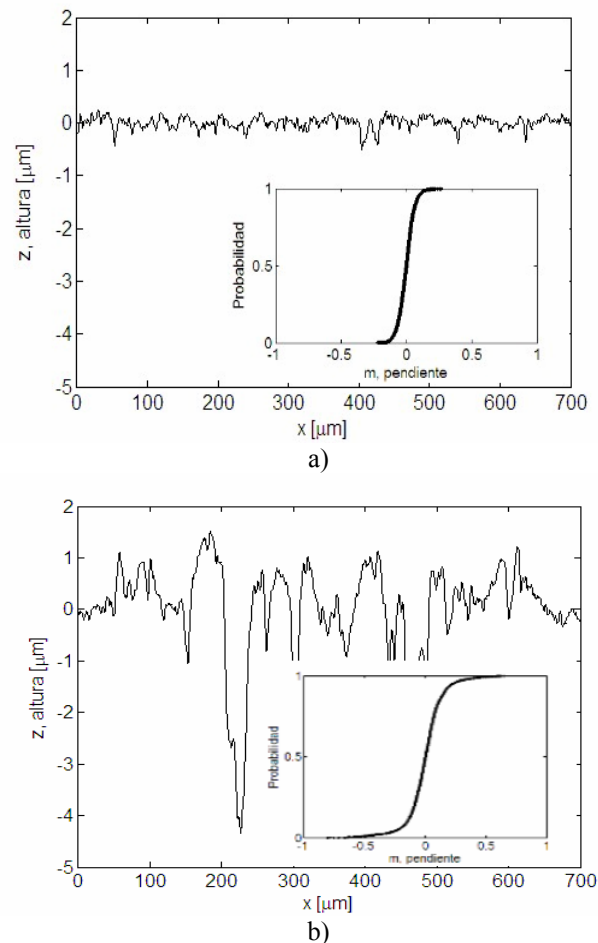
El modelo computacional se validó experimentalmente utilizando patrones de esparcimiento obtenidos sobre una pantalla, usando el arreglo óptico que se esquematiza en la figura 4; donde OL es la distancia del láser al punto O de incidencia en la superficie,  $\theta$  es el ángulo de incidencia y OP es la distancia perpendicular a la pantalla. Los parámetros del diseño experimental se muestran en la Tabla 1. Los valores de OL y OP quedaron determinados por las limitaciones físicas del arreglo óptico experimental;  $\theta$  se designó arbitrariamente.

Para el arreglo óptico se utilizó un diodo láser comercial con perfil elíptico intrínseco, *Lasermate*, con mecanismo de enfoque y longitud de onda  $\lambda$  centrada en 643 nm. Para la superficie se utilizó un patrón de rugosidad Mitutoyo modelo 178-602, con perfil periódico sinusoidal y  $R_y = 9.9 \mu\text{m}$ , rugosidad pico-pico, de la cual se obtiene  $R_q = 3.5 \mu\text{m}$ , rugosidad rms, que es la que tiene sentido físico para el tipo de cálculos del presente trabajo.

La imagen sobre la pantalla se registró mediante fotografía digital y se analizó usando la herramienta de procesamiento de imágenes de MATLAB® para obtener una gráfica correspondiente de intensidad de luz. Los resultados se muestran en la figura 5. Las gráficas corresponden a la intensidad de luz reflejada en la pantalla para cada uno de los cuatro ángulos del diseño experimental de la Tabla 1. En cada figura se muestra el valor del ángulo  $\theta$  utilizado; el inserto en la parte superior derecha muestra una imagen en tonos de gris de los patrones registrados en la pantalla. Las coordenadas del plano de la pantalla están en píxeles y el valor de intensidad va de 0 a 1 dependiendo de la intensidad de luz. Las imágenes digitales se adquirieron con una resolución de 300 dpi, para minimizar el espacio de memoria y tiempo de procesamiento.

#### 3.2 Resultados de la modelación numérica

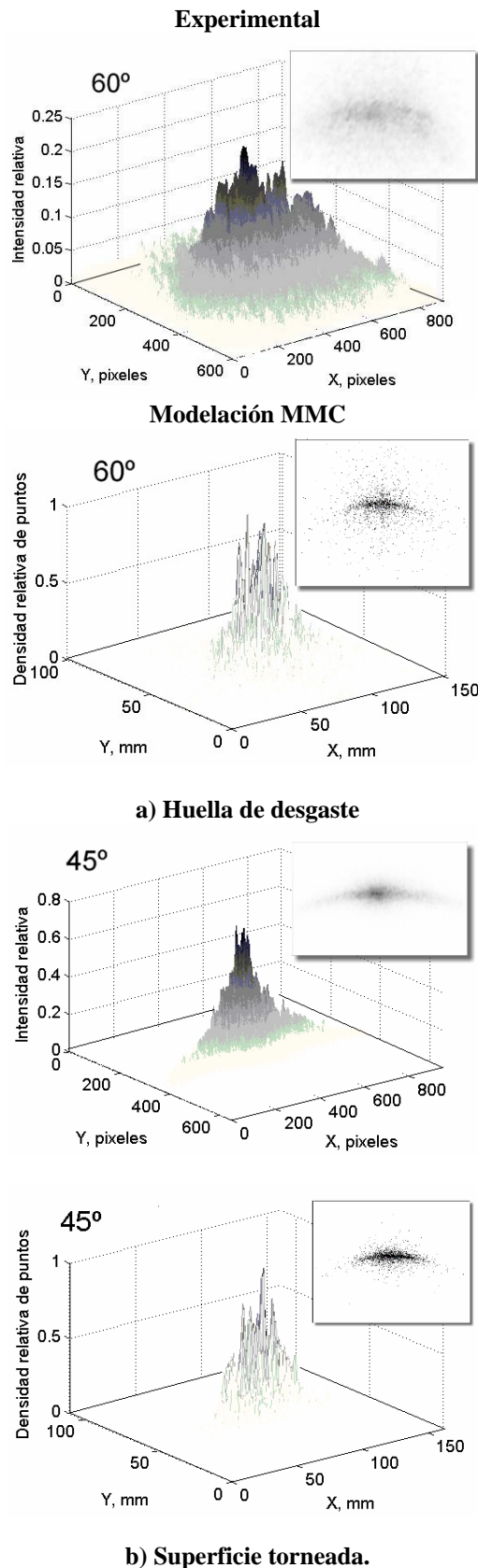
Para la modelación numérica del fenómeno de esparcimiento se generó la FDA de pendientes a partir del perfil de rugosidad de la superficie patrón Mitutoyo



**Figura 8.** Perfil de la textura de la superficie del disco y la correspondiente FDA de pendientes, antes (a) y después del desgaste (b). La altura Z del perfil se da en  $\mu\text{m}$ .

modelo 178-602. El perfil de rugosidad se obtuvo con un perfilómetro Mitutoyo modelo SJ-400, con punta de diamante a  $60^\circ$ . El perfil de rugosidad y la FDA de pendientes se muestran en la figura 6. La gráfica de este perfil corresponde a ocho mil datos tomados por el perfilómetro sobre la superficie del patrón. De esta gráfica se aprecia que la  $R_y$  corresponde a la especificación técnica del patrón. La FDA de pendientes no es perfectamente recta debido a errores de acabado en la superficie del patrón de rugosidad y de medición del perfilómetro. Para los parámetros de la disposición geométrica de entrada se utilizaron los del diseño experimental de la Tabla 1. Se seleccionó una reflectividad de 0.8 que generalmente se asigna al acero. El número de haces en la simulación fue de 3800 a 6400 puntos por  $\text{mm}^2$ .

Los resultados de la modelación numérica se muestran en la figura 7, observándose una similitud con la forma de los patrones de esparcimiento de la figura 5, obtenidos experimentalmente. El resultado de la simulación se presenta como una gráfica de esparcimiento formada con puntos que provienen, cada uno, de un rayo individual que parte del láser y que se esparce en la superficie. Se elaboró



**Figura 9.** Comparación de los resultados obtenidos experimentalmente y el MMC para dos casos: a) huella de desgaste y b) superficie torneada. En el recuadro se muestra la proyección en un plano (pantalla).

una grafica de densidad de estos puntos para simular la intensidad de la luz y compararlo con los patrones de intensidad experimentales. La dependencia del radio de curvatura de las gráficas de intensidad luminosa como función del ángulo de incidencia  $\theta$  muestra la misma tendencia tanto para la simulación como para el experimento, proporcionando un parámetro cuantitativo de comparación. El coeficiente de correlación lineal del radio de curvatura del patrón de esparcimiento simulado vs el experimental fue de 0.92, lo que indica que el modelo reproduce con cierto grado de exactitud el comportamiento del fenómeno de esparcimiento observado en las condiciones experimentales.

#### 4. Aplicaciones del modelo a superficies con desgaste

Utilizando la metodología descrita en la sección anterior, se analizaron huellas circulares de desgaste obtenidas en un experimento típico de perno en disco, para el cual se utilizó una bola de acero galvanizado de 2.4 mm de diámetro para el perno y una probeta plana circular, disco, de acero suave, tipo AISI 1018, cuyo perfil de rugosidad, antes del contacto mecánico, se muestra en la figura 8a. Con este perfil se determina la FDA de pendientes. Se seleccionó una reflectividad de 0.80 típica para los materiales y acabados de esta superficie.

Las observaciones de luz esparcida se llevaron a cabo con el disco estático, después de haber hecho la huella de desgaste sobre la superficie del disco, aplicando una carga de 4 N. Los parámetros  $\theta$ , OL, y OP se determinaron según la Tabla 1.

En la figura 9 se muestran los patrones de esparcimiento obtenidos de las superficies del disco y los correspondientes resultados de las simulaciones determinadas a partir de las FDA de las pendientes, para dos casos representativos: 1)  $\theta$  igual a 60°, sobre una superficie desgastada en el tribómetro; 2)  $\theta$  igual a 45°, sobre la superficie pulida, sin desgaste. En la columna de la izquierda se muestran los resultados obtenidos con el arreglo óptico experimental, mientras que en la de la derecha se muestran los obtenidos por MMC.

En ambas figuras se observa una semejanza en la forma del patrón de esparcimiento, tanto en la imagen bidimensional del inserto, como en la gráfica de intensidad de luz. Para el caso de la simulación se incidieron 3000 rayos.

#### 5. Conclusiones

El comportamiento de la superficie para reflejar la luz del haz láser se modeló a partir de la FDA de las pendientes de los picos de rugosidad, siendo ésta una de las suposiciones más fuertes de nuestro modelo.

El modelo se validó con un patrón de rugosidad periódica y se aplicó a una superficie de ingeniería con acabado superficial de rugosidad  $R_q$  entre 0.1 y 1.0  $\mu\text{m}$ . Los resultados obtenidos muestran que el modelo numérico simula correctamente el comportamiento de la luz esparcida por la superficie, teniendo como parámetros de

entrada, además de los de rugosidad, las propiedades ópticas de la superficie y la disposición geométrica de los elementos ópticos del sistema de LLS.

A diferencia de otros modelos que suponen una distribución normal de los picos de rugosidad en la superficie [10-12], el que aquí se presenta no requiere que la textura de la superficie siga un patrón matemático definido. Esta independencia de la modelación numérica respecto del acabado de la superficie le proporciona una aplicación potencial en estudios de desgaste incipiente en sistemas tribológicos, en particular, los que se llevan a cabo en un aparato de perno en disco.

En el presente trabajo el algoritmo se aplicó a superficies maquinadas en torno, cuyo sesgo de textura es de forma circular, como el de una huella de desgaste generada en un tribómetro de perno en disco.

Los resultados experimentales demuestran que el modelo permite describir correctamente la forma del patrón de esparcimiento considerando una fuente circular de luz láser con haz gaussiano y la excentricidad del mismo sobre el área iluminada, que se genera al variar el ángulo de incidencia sobre la superficie de prueba.

Los modelos de esparcimiento propuestos por Beckmann y Spizzichino[11], Rao y Sadhana [12], y Hermansson et al [10] proponen una correlación del esparcimiento de la luz tomando en cuenta el parámetro de rugosidad  $R_q$ , que es un parámetro que caracteriza la amplitud de la rugosidad de una superficie. En este trabajo se muestra que la principal correlación se basa en la relación de distribución de las pendientes de rugosidad, que forma un parámetro híbrido con mayor sentido físico porque involucra la amplitud y el espaciado de la rugosidad.

### Agradecimientos

Los autores agradecen el financiamiento otorgado por el CONACYT, proyecto 52329, y el Instituto Politécnico Nacional, proyecto SIP20082267. Uno de los autores (VM), también agradece a la Universidad Politécnica de Querétaro las facilidades brindadas para su participación en el presente trabajo.

### Referencias

- Y. Jeng, Z. Lin and S. Shyu, Journal of Tribology. **126**, 620 (2004).
- D. J. Whitehouse, Meas. Sci. Technol. **8**, 955 (1997).
- D. J. Whitehouse, Handbook of Surface Metrology (IOP, USA, 1994).
- D. J. Whitehouse, Handbook of Surface and Nanometrology. (IOP, London, 2003).
- J. Huerta-Ruelas, M. López-López and O. Zelaya-Angel, Thin Solid Films. **373**, 239 (2000)
- C. Zerrouki, F. Miserey and P. Pinot. Metrologia. **36**, 403 (1999).
- U. Persson, Wear. **215**, 54 (1998).
- J. C. Le Bosse, G. Hansali, J. Lopez and J.C. Dumas, Wear **224**, 236 (1999).
- I. Dominguez L., J. A. Huerta R., R. Montes R., J. D. Ortiz A., J. Pichardo C., A. L. García G., M. Aguilar C. and D. Jaramillo V., Mediciones de cambio de intensidad en luz láser esparcida, aplicada al monitoreo de desgaste. Simposio Metrología 2006, Querétaro, Mexico.
- P. Hermansson, G. Forssell and J. Fagerström, A Review of Models for Scattering from Rough Surfaces, (FOI- Swedish Defence Research Agency, Linköping, 2003).
- P. Beckmann, and A. Spizzichino, The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces, (Artech House, Norwood, 1987).
- C. B. Rao and B. Raj, Sadhana. **28**, 739 (2003).
- G.H. Spencer and M.V. Murty, Journal of the Optical Society of America **52**, 672 (1962).
- S. K. Nayar, K. Ikeuchi and T. Kanade, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **13**, 611 (1991).
- N. Metropolis and S. Ulam, Journal of the American Statistical Association **44**, 335 (1949).
- S. H. Hong and J. R. Welty, Numerical Heat Transfer. **36** Part A, 395 (1999).
- A. V. Prokhorov, Metrologia. **35**, 465 (1998).
- Z. Chu, J. Dai and R. E. Bedford, in: Temperature, its measurement and control in science and industry. (AIP, Toronto, 1992).
- C. Moler. Numerical Computing with MATLAB, (SIAM, 2004).
- K. E. Torrance, and E. M. Sparrow. Journal of the Optical Society of America, **57**, 1105 (1967).